29/11/18

$II_p: T_pS \to \mathbb{R}$, $II_p(w) = \langle L_p w, w\rangle_p$

Ο πίνακας της $2^{ης}$ θεμελιώδης μορφής ως προς τη βάση X_u, X_v

είναι $\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$ όπου $e, f, g: U \to \mathbb{R}$
Θεμελιώδη ποσά $2^{ης}$ τάξης

$e = \langle LX_u, X_u\rangle$

$f = \langle LX_u, X_v\rangle = \langle LX_v, X_u\rangle$

$g = \langle LX_v, X_v\rangle$

$w = aX_u + bX_v$

$II_p(w) = \langle Lw, w\rangle = \langle L(aX_u + bX_v), aX_u + bX_v\rangle$

$= \langle aLX_u + bLX_v, aX_u + bX_v\rangle = \langle LX_u, X_u\rangle a^2 + \langle LX_u, X_v\rangle ab + \langle LX_v, X_u\rangle ab + \langle LX_v, X_v\rangle b^2$

$= ea^2 + 2fab + gb^2$

$w = aX_u + bX_v \Rightarrow II_p(w) = ea^2 + 2fab + gb^2$

$LX_u = -(N \circ X)_u = -N_u$

$LX_v = -(N \circ X)_v = -N_v$

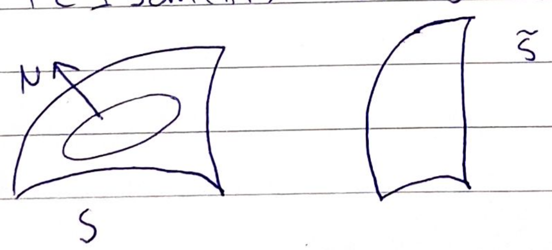
$N = \dfrac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} = \dfrac{X_u \times X_v}{\sqrt{EG - F^2}}$

$e = \langle LX_u, X_u\rangle = -\langle N_u, X_u\rangle = -(\langle N, X_u\rangle)_u + \langle N, X_{uu}\rangle$

$\boxed{e = \langle X_{uu}, N\rangle}$, $\boxed{f = \langle X_{uv}, N\rangle}$, $\boxed{g = \langle X_{vv}, N\rangle}$

Γεωμετρικώς Ισότιμες Επιφάνειες

Έστω $S, \tilde{S}$ γεωμ. ισότιμες επιφάνειες, δηλαδή $\exists$ $T \in Isom(\mathbb{R}^3)$ και $\tilde{S} = T(S)$



$T = T_u \circ A$

$A \in O(3)$

$N = \dfrac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}$, $\tilde{X} = T \circ X$

$\tilde{X}_u = AX_u$

$\tilde{X}_v = AX_v$

$\tilde{X}_u \times \tilde{X}_v = (AX_u) \times (AX_v) = \pm A(X_u \times X_v)$

$\dfrac{\tilde{X}_u \times \tilde{X}_v}{\|\tilde{X}_u \times \tilde{X}_v\|} = \pm \dfrac{A(X_u \times X_v)}{\|X_u \times X_v\|} = \pm A\left(\dfrac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}\right)$

$= \pm AN$

Άρα, αν η S είναι προσανατολισμένη με απεικόνιση Gauss $N: S \to$
τότε και η $\tilde{S}$ είναι προσανατολισμένη με απεικόνιση
$\tilde{N}: \tilde{S} \to S^2$, $\tilde{N} = \pm AN$

$\tilde{N} = \pm AN$
$\tilde{L} = -d\tilde{N} = \mp d(A \circ N) = \mp A \circ dN = \pm A \circ (-dN)$
$\tilde{L} = \pm A \circ L$
$\tilde{II}_{T(p)}(dT_p(w)) = < \tilde{L}_{T(p)}(dT_p w), dT_p w >$
$= \pm < A(L_p w), Aw >$
$= \pm < L_p w, w > = \pm II_p$

V είναι $\mathbb{R}$: δ.χ. με $\dim V = 2$, εφοδιασμένος με εσωτερικό γινόμενο $< , >$.
$A: V \to V$, $\beta_A : V \times V \to \mathbb{R}$, $\beta_A(x,y) = <Ax, y>$
β_A: συμμετρική διγραμμική μορφή $\Leftrightarrow$ A είναι αυτοπροσαρτημένος
$\Leftrightarrow <Ax, y> = <x, Ay>$
$Q_A: V \to \mathbb{R}$, $Q_A(x) = <Ax, x>$

Θεώρημα: $A: V \to V$ αυτ/νος, υπάρχει ορθομοναδιαία βάση $\{e_1, e_2\}$ του V τ.ω. $Ae_1 = \lambda_1 e_1$, $Ae_2 = \lambda_2 e_2$, όπου
$\lambda_1 = \max\{Q_A(w) / \|w\| = 1\}$
$\lambda_2 = \max\{Q_A(w) / \|w\| = 1\}$

$w = xe_1 + ye_2$
$Q_A(w) = < Aw, w > = < A(xe_1 + ye_2), xe_1 + ye_2 >$
$= < xAe_1 + yAe_2, xe_1 + ye_2 > = < \lambda_1 xe_1 + \lambda_2 ye_2, xe_1 + ye_2 >$

Συμπέρασμα: $w = xe_1 + ye_2 \Leftrightarrow Q_A(w) = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2$

- Η Q_A καλείται θετικώς (αρνητικώς) οριστική
$\Leftrightarrow Q_A(x) > 0, \forall x \in V \setminus \{0\}$ ($Q_A(x) < 0, \forall x \in V \setminus \{0\}$)
$\Leftrightarrow \lambda_1 \geq \lambda_2 > 0$ ($0 > \lambda_1 \geq \lambda_2$)

• Η Q_A καλείται θετικώς (αρνητικώς) ημιοριστική

$\Leftrightarrow Q_A(x) \geq 0 \ \forall x \in V$ $(Q_A(x) \leq 0 \ \forall x \in V)$ και υπάρχει

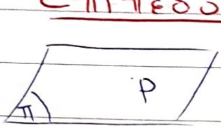
$x \in V \setminus \{0\}$ με $Q_A(x) = 0$

$\Leftrightarrow \lambda_1 \geq \lambda_2 = 0$ $(0 = \lambda_1 \geq \lambda_2)$

• Η Q_A καλείται αοριστική? $\Leftrightarrow$

$\exists x, y \in V \setminus \{0\}$ ώστε $Q_A(x) < 0$ και $Q_A(y) > 0$ $\Leftrightarrow \lambda_1 > 0 > \lambda_2$

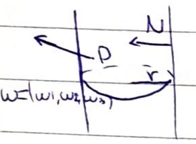
• Επίπεδο



$II_p = 0 I_p$ θετικώς και αρνητικώς ημιοριστική

$K_n(\omega) = 0, \forall \omega$, $K_1(p) = 0 = K_2(p)$

• Κύλινδρος



$K_1(p) = \frac{1}{r}$

$K_2(p) = 0$

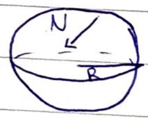
$$II_p(\omega) = \frac{1}{r}(\omega_1^2 + \omega_2^2) = \frac{1}{r}(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_3^2)$$

$$= \frac{1}{r}(I_p(\omega) - \omega_3^2) \geq 0$$

θετικώς ημιοριστική

$$K_n(\omega) = \frac{1}{r} \frac{I_p(\omega) - \omega_3^2}{I_p(\omega)} = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{\omega^3}{\|\omega\|^2}\right), \quad 0 \leq K_n(\omega) \leq \frac{1}{r}$$

• Σφαίρα



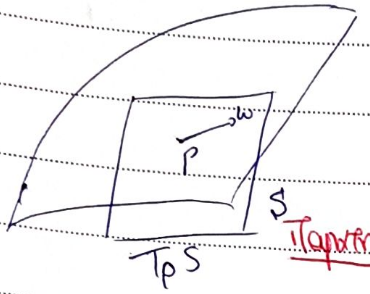
$II_p = \frac{1}{R} I_p$

θετικώς οριστική

$K_n(\omega) = \frac{1}{R}$, $K_1(p) = \frac{1}{R} = K_2(p)$

Κάθετη Καμπυλότητα

Ορισμός: Έστω S προσανατολισμένη επιφάνεια. Καλούμε κάθετη καμπυλότητα της S στο σημείο της P για την εφαπτόμενη διεύθυνση $w \in T_pS - \{0\}$ τον αριθμό $k_n(w) = \dfrac{II_p(w)}{I_p(w)}$

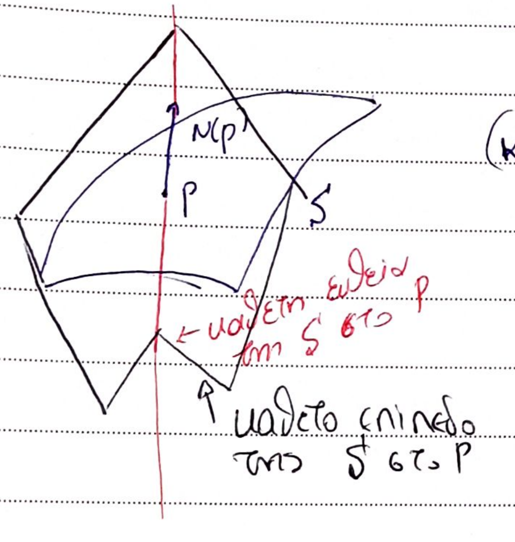


Παρατήρ.: $w = aX_u + bX_v \Rightarrow K_n(w) = \dfrac{ea^2 + 2fab + gb^2}{Ea^2 + 2Fab + Gb^2}$

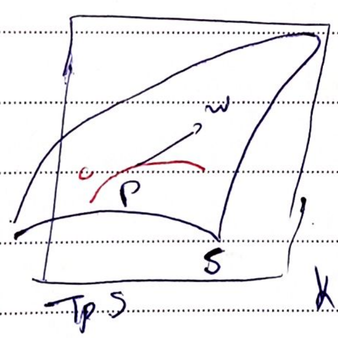
$K_n(X_u) = \dfrac{e}{E}$, $K_n(X_v) = \dfrac{g}{G}$

$\lambda \neq 0$, $k_n(\lambda w) = \dfrac{II_p(\lambda w)}{I_p(\lambda w)} = \dfrac{\lambda^2 II_p(w)}{\lambda^2 I_p(w)}$

$K_n(\lambda w) = k_n(w)$



(κάθε επίπεδο που περιέχει το κάθετο)



$\|w\| = 1$ $\quad k_n(w) = ?$

Θεωρώ κανονική καμπύλη $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ με καμπυλότητα $k : (-\varepsilon, \varepsilon) \to [0, +\infty)$ με $c(0) = p$ και $\dot{c}(0) = w$

Υποθέτω ότι η c παραμετρείται με φυσική παράμετρο

$k(n) = w = \dfrac{I_p(w)}{I_p(w)} = II_p(w) = \langle L_p w, w \rangle_p = -\langle dN_p(w), w \rangle_p$

$= -\langle (N \circ c)^{\cdot}(0), \dot{c}(0) \rangle = -\dfrac{d}{ds}\left(\langle N \circ c(0), \dot{c}(0) \rangle + \langle N \circ c(0), \ddot{c}(0) \rangle\right.$

$= \langle N(p), \ddot{c}(0) \rangle$

- Αν $K(0)=0$, τότε $k_n(w)=0$
- Υποθέτω ότι η $K(0)>0$. Άρα, λόγω συνέχειας $K(s)>0 \ \forall s\in(-\varepsilon,\varepsilon)$

$\Rightarrow \ddot{c}(0)=\dot{\vec{t}}(0)=K(0)\vec{n}(0)$

$$k_n(w)=k_n(\dot{c}(0))=K(0)\langle N(p),\vec{n}(0)\rangle$$

$$\boxed{k_n(\dot{c}(0))=K(0)\cdot\cos\vartheta \quad , \quad \vartheta=\measuredangle(N(p),\vec{n}(0))}$$

Αν c είναι τομή της S με κάθετο επίπεδο της στο $p\in S$, τότε $k_n(w)=\pm K(0)$

$A: V\to V$ αυτοπροσαρτημένος μετασχηματισμός $\Rightarrow \exists$ ορθομοναδιαία βάση $\{e_1,e_2\}$ ώστε $Ae_1=\lambda_1 e_1$, $Ae_2=\lambda_2 e_2$

$\lambda_1=\max\{Q_A(w)\mid \|w\|=1\}$

$\lambda_2=\max\{Q_A(w)\mid \|w\|=1\}$

$Q_A(w)=\langle Aw,w\rangle$

$L_p: T_pS\to T_pS$

$Q_{L_p}(w)=\langle L_pw,w\rangle=\mathrm{II}_p(w)$

$Q_{L_p}=\mathrm{II}_p$

Θεώρημα

Έστω S προσανατολίσιμη επιφάνεια. Για κάθε σημείο $p\in S$ υπάρχει ορθ. βάση $\{e_1(p),e_2(p)\}$ του T_pS τέτοια ώστε $L_pe_1(p)=k_1(p)e_1(p)$, $L_pe_2(p)=k_2(p)e_2(p)$ και

$k_1(p)=\max\{\mathrm{II}_p(w)\mid w\in T_pS,\ \|w\|=1\}=\max\{k_n(w)\mid w\in T_pS,\ \|w\|=1\}$

$k_2(p)=\min\{\mathrm{II}_p(w)\mid w\in T_pS,\ \|w\|=1\}=\min\{k_n(w)\mid w\in T_pS,\ \|w\|=1\}$

Κυριες Διευθύνσεις - Κύριες Καμπυλότητες

Ορισμός: Τα διανύσματα $\{e_1(p), e_2(p)\}$ καλούνται κύριες διευθύνσεις στο p ενώ οι αριθμοί $k_1(p), k_2(p)$ καλούνται κύριες καμπυλότητες της S στο p.

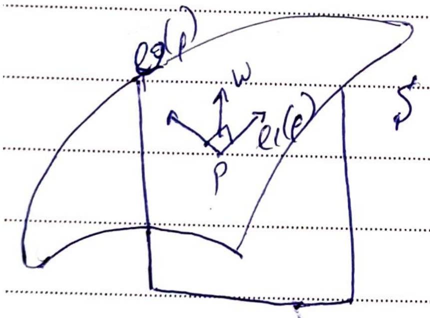
$L_p: T_pS \to T_pS$: Ο πίνακας της L_p είναι $\begin{pmatrix} k_1(p) & 0 \\ 0 & k_2(p) \end{pmatrix}$

Κυριες καμπυλότητες της S εννοούμε τις συναρτήσεις
$k_1, k_2,\ S \to \mathbb{R}$ $\quad p \mapsto k_1(p)$ $\quad | \ k_1 \geq k_2$
$\quad p \mapsto k_2(p)$

Τύπος Euler

$w \in T_pS$, $\|w\| = 1$, $k_n(w) = ?$

$\theta = \angle(w, e_1(p))$



τότε $w = \cos\theta\, e_1(p) + \sin\theta\, e_2(p)$

$$k_n(w) = \frac{II_p(w)}{I_p(w)} = II_p(w) = \langle L_p w, w \rangle_p$$

$$T_pS = \langle L_p(\cos\theta e_1(p) + \sin\theta e_2(p)), \cos\theta e_1(p) + \sin\theta e_2(p) \rangle_p$$
$$= \langle \cos\theta L_p e_1(p) + \sin\theta L_p e_2(p), \cos\theta e_1(p) + \sin\theta e_2(p) \rangle$$
$$= \langle \cos\theta\, k_1(p) e_1(p) + \sin\theta\, k_2(p) e_2(p), \cos\theta e_1(p) + \sin\theta e_2(p) \rangle_p$$

$\boxed{\begin{array}{l} w = \cos\theta e_1(p) + \sin\theta e_2(p) \Rightarrow \\ \Rightarrow k_n(w) = k_1(p)\cos^2\theta + k_2(p)\sin^2\theta \\ \text{Τύπος Euler} \end{array}}$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της L_p είναι

$$\chi(t) = \begin{vmatrix} k_1(p) - t & 0 \\ 0 & k_2(p) - t \end{vmatrix} =$$

$$= t^2 - (k_1(p) + k_2(p))t + k_1(p)k_2(p)$$

$$\Leftrightarrow \chi(t) = t^2 - \mathrm{trace} L_p\, t + \det L_p$$

Καμπυλότητα Gauß - μέση καμπυλότητα

Ορισμός: 1) Καλούμε καμπυλότητα Gauß μια προσ/μενη επιφάνεια S τη συνάρτηση $K: S \to \mathbb{R}$, $K(p) = \det L_p$

2) Καλούμε μέση καμπυλότητα τη συνάρτηση $H: S \to \mathbb{R}$ $H(p) = \frac{1}{2}\operatorname{trace} L_p$

Άρα καμπυλότητα Gauß $K = k_1 k_2$

Μέση καμπυλότητα $H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$

$\chi_{L_p}(t) = t^2 - 2H(p)t + K(p)$

ρίζες $\frac{2H(p) \pm 2\sqrt{H^2(p) - K(p)}}{2}$

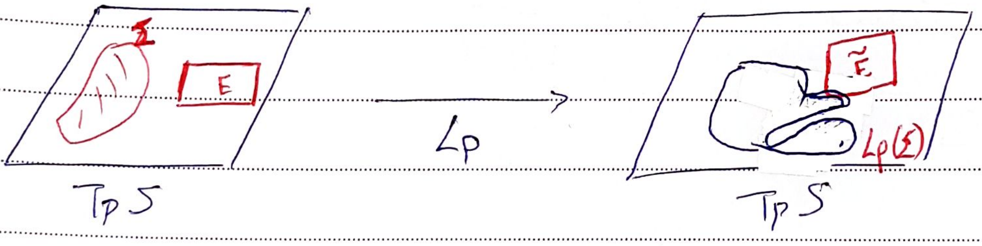
$\Delta = 4H^2(p) - 4K(p) = 4(H^2(p) - K(p))$

ισχύει $H^2 \geq K$

$k_1 = H + \sqrt{H^2 - K}$

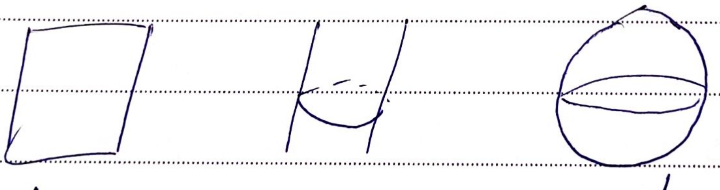
$H^2(p) = K(p) \iff k_1(p) = k_2(p)$

$k_2 = H - \sqrt{H^2 - K}$



Εμβαδό $L_p(\Sigma) = |\det L_p|\ \text{Εμβ}(\Sigma)$

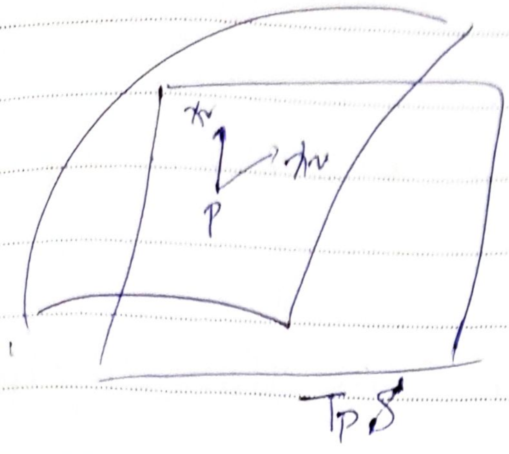
$= |K(p)|\ \text{Εμβ}(\Sigma)$



$K = 0$, $H = 0$

$K = 0$, $H = \frac{1}{2r}$

$K = \frac{1}{R^2}$, $H = \frac{1}{R}$



Θα βρω τον πίνακα της απεικόνισης Weingarden L_p ως προς τη βάση $\{x_u, x_v\}$

$$Lx_u = a_{11}x_u + a_{21}x_v \;\to\; \begin{cases} Ea_{11} + Fa_{21} = e \\ Fa_{11} + Ga_{21} = f \end{cases}$$

$$Lx_v = a_{12}x_u + a_{22}x_v \;\to\; \begin{cases} Ea_{21} + Fa_{22} = f \\ Fa_{12} + Ga_{22} = g \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \Rightarrow (a_{ij}) = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$$

$$EG - F^2 = \|x_u \times x_v\|^2 > 0$$

Πρόταση

Έστω $X: U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ σύστημα συντεταγμένων της S. Τότε η καμπυλότητα Gauss και η μέση καμπυλότητα δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις $K \circ X = \dfrac{eg - f^2}{EG - F^2}$

$$H \circ X = \frac{Eg - 2Ff + Ge}{2(EG - F^2)}$$

$$\left.\begin{aligned} K &: S \to \mathbb{R} \\ H &: S \to \mathbb{R} \end{aligned}\right\} \text{είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις}$$

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= H + \sqrt{H^2 - K} \\ k_2 &= H - \sqrt{H^2 - K} \end{aligned}\right\} \text{συνεχείς}$$